Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра Математической теории игр и статистических решений

Голубев Руслан Игоревич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Поиск равновесных решений в модели страхования

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,

кандидат физ.-мат. наук,

доцент

Кузютин Д. В.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Неотъемлемой частью современной экономики является сфера страхования. Человеческая жизнь устроена так, что невозможно исключить возникновение непредвиденных ситуаций, вызванных явлениями природы или обстоятельствами, которые не зависят от воли и желания человека. Эти неблагоприятные события, среди которых наиболее распространены стихийные бедствия и несчастные случаи, могут привести к значительным материальным убыткам, ущербу здоровья или потере трудоспособности. Отсюда возникает необходимость поиска путей минимизации указанных потерь, что и обусловило появление и развитие страхования.

Риск является основой возникновения страховых отношений. Страхование тесно связано с его вероятностью, т.к. очевидно, что чем она меньше, тем легче и дешевле можно организовать страхование риска. Высокая вероятность неблагоприятного события предусматривает более дорогую страховую защиту. Страховым компаниям необходимо правильно оценивать вероятность риска, для определения величины страхового фонда и возможности возмещения убытков застрахованных.

Мы рассматриваем модель вертикальной дифференциации на рынке страхования в условиях олигополии. Под олигополией понимают рынок однородного товара, спрос на который удовлетворяется небольшим числом производителей, причём рыночная цена зависит от решений всех конкурирующих фирм.

Каждая фирма при выборе своего стратегического решения наряду с эластичностью спроса и структурой собственных издержек, должна принимать во внимание возможную реакцию своих конкурентов. Таким образом, задача стратегической конкуренции нескольких фирм в условиях олигополии относится к классу задач принятия решений в условиях конфликта и неопределённости, для исследования которых применяется инструментарий математической теории игр [4]. Для построения SPE (subgame perfect equilibrium) в позиционной игре будет использована попятно-рекуррентная процедура, то есть в рассматриваемой нами двухшаговой игре мы будем начинать со второго шага.

В главе 1 будет рассмотрена ситуация дуополии Штакельберга, в которой существует иерархия игроков. Для полноты изложения приводится, равновесие по Штакельбергу в случае, когда фирма 1 – лидер, а фирма 2 – ведомый (такое равновесие будем обозначать как 1-равновесие) [9]. Мною был рассмотрен случай 2-равновесия по Штакельбергу, т.е. случай, когда фирма 2 – лидер, фирма 1 - ведомый, и приведён сравнительный анализ результатов.

В главе 2 исследовано монопольное ценообразование при условии добровольного страхования. Был рассмотрен случай, когда фирма предлагает потребителям три различных контракта.

В главе 3 рассмотрен случай дуополии при условии добровольного страхования в предположении, что параметр, описывающий вероятность страхового случая, имеет треугольное распределение.

Для вычислений был применён пакет Wolfram Mathematica 10.2 (код приведен в приложении.)

Постановка задачи

Рассмотрим простейшую модель вертикальной дифференциации в условиях олигополистической конкуренции, то есть ситуацию, когда две фирмы конкурируют на одном рынке и предлагают потребителям услуги-заменители, дифференцированные по качеству.

Базовые предпосылки модели:

1. Потребители формируют собственные оценки качества $q \in \left[\underline{q}, \overline{q}\right]$ предлагаемых им услуг, которые играют роль как в определении верхней границы цены tq, приемлемой для данных потребителей, так и в выборе конкретной услуги из качества доступных.
2. Потребители в разной степени готовы платить большую цену за повышение качества предлагаемых услуг. Обозначим за t – параметр, определяющий вероятность страхового случая потребителя:
$$0 \leq t \leq \ \bar{t} \leq 1.$$
3. Множество стратегий фирмы – это всевозможные вектора (q_i, p_i), где q_i – качество предлагаемых услуг, p_i – цена $(i = 1,2)$.

Перейдём к формализованному описанию двухшаговой теоретико-игровой модели вертикальной дифференциации в условиях олигополистической конкуренции.

На первом этапе фирмы одновременно выбирают уровни качества $q_i \in [\underline{q}, \overline{q}]$, достижение которых требует издержек $FC(q_i)$. При этом

$$\underline{q} \leq q_1 < q_2 \leq \bar{q}. \quad (1)$$

С точки зрения потребителей услуги являются заменителями, и в рассматриваемый промежуток времени потребитель может приобрести не более одной услуги.

На втором шаге (этап ценовой конкуренции) фирмы, зная вектор выбранных на первом шаге уровней качеств (q_1, q_2), одновременно назначают цены на свои услуги (p_1, p_2) соответственно.

Каждый потребитель из числа S (далее будем считать, что $S = 1$) стремится максимизировать свою функцию потребительского излишка следующего вида:

$$U = \max\{tq_1 - p_1, tq_2 - p_2\},$$

где $t \in [0, \bar{t}]$ – параметр, который показывает вероятность страхового случая потребителя. Чем больше вероятность страхового случая, тем большую цену готов заплатить потребитель за услуги страхования. Предполагается, что мы рассматриваем случай обязательного страхования, а также, что параметр t – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} \leq 1$. Реакция потребителей на вектор (q_1, p_1, q_2, p_2) однозначно определяет доли рынка и доход каждой из фирм (см. Рис. 1). Цель фирм – максимизация прибыли от реализации своих услуг за рассматриваемый период.

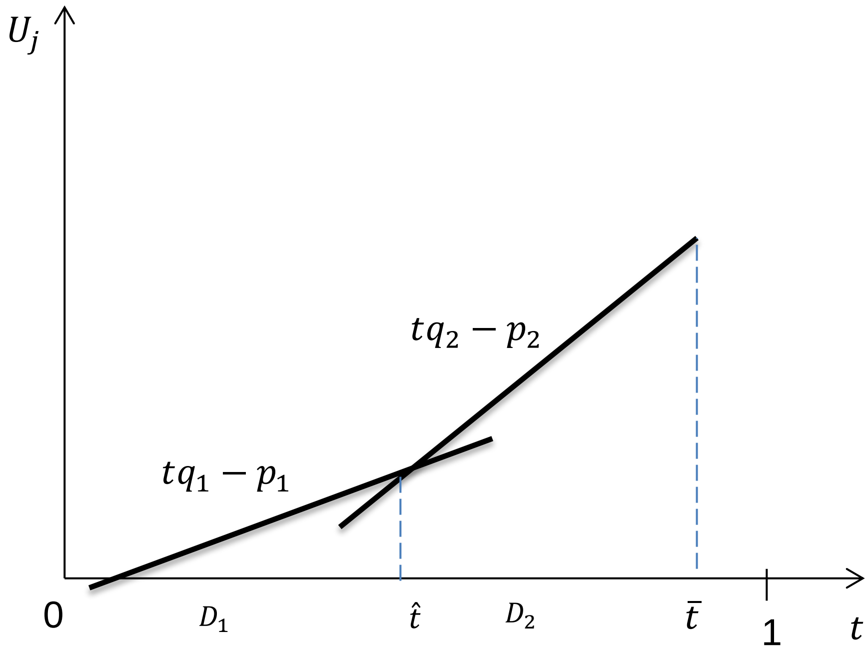

Рис. 1. График самоотбора потребителей

Точка $\hat{t} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$ отвечает потребителю, которому покупка услуги той или иной фирмы в равной степени привлекательна.

Все потребители, для которых параметр $t \in [0, \hat{t}]$, выберут услуги первой фирмы, а все потребители, для которых параметр $t \in [\hat{t}, \overline{t}]$, выберут товар второй фирмы. Так как доли рынка должны быть неотрицательны, необходимо ввести ограничение:

$$0 < \hat{t} < \overline{t}. \tag{2}$$

Функции ожидаемой прибыли обеих фирм могут быть записаны в виде:

$$\Pi_1 = \frac{1}{\overline{t}} \left[\hat{t} p_1 - \int_0^{\hat{t}} vt\, dt \right] - FC(q_1), \tag{3}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{\overline{t}} \left[(\overline{t} - \hat{t}) p_2 - \int_{\hat{t}}^{\overline{t}} vt\, dt \right] - FC(q_2), \tag{4}$$

где $FC(q_i)$ – это затраты на улучшение качества (постоянные издержки), $v > 0$ – средний размер страхового возмещения, а vt – ожидаемые затраты по сопровождению страхового случая потребителя с параметром t (cost of the claims handing procedure [10]).

Для построения абсолютного равновесия мы будем использовать “попятно-рекуррентную процедуру” [7]. То есть на первом шаге мы будем рассматривать этап ценовой конкуренции и строить SPE. В соответствии с построенным равновесием далее будем рассматривать первый этап – конкуренцию по качеству.

Рассмотрим игру в нормальной форме, т.е. совокупность $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – непустое множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, а H_i – функция выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств $\{X_i\}_{i \in N}$ стратегий игроков $X = \prod_{i \in N} X_i$, $H_i: X \to R$. Вектор $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in X_i$ образует ситуацию в игре Г.

Определение 1. Ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в игре Г, если для всех $x_i \in X_i$ и $i = 1, \dots, n$ имеет место неравенство

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^*||x_i),$$

где $H_i(x^*||x_i) = H_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ [6].

Пусть $n = 2$, т.е. в игре Г имеется всего 2 игрока.

Определение 2. *Равновесием по Штакельбергу* в игре Г называется набор стратегий (x_1^*, x_2^*), где $x_2^* = R(x_1^*)$ – это функция наилучшего ответа игрока 2 на стратегию x_1^*, которую, в свою очередь, находят из решения задачи

$$H_1(x_1^*, x_2^*) = \max_{x_1 \in X_1} H_1(x_1, R(x_1))\,.\,[5]$$

Поставим следующие задачи:

1. Рассмотреть модель конкуренции “лидер-последователь”, построить равновесие по Штакельбергу в ценах при условии того, что фирма 2 будет лидером, а фирма 1 - ведомым, найти оптимальные параметры цен и качеств для обеих фирм.
2. В случае добровольного страхования (при монопольном ценообразовании) рассмотреть случай, когда фирма предлагает потребителям 3 различных контракта (q_i, p_i), найти оптимальные векторы цен и качеств для обеих фирм.
3. Для случая добровольного страхования рассмотреть конкуренцию двух фирм, при условии того, что параметр t имеет треугольное распределение.

Обзор литературы

Модель, которая была взята за основу моего исследования, подробно расписана в [14]. В этой книге было введено понятие пространства продукта, а так же рассмотрено стратегическое поведение фирм в условиях олигополии, в частности исследование статической и динамической ценовой конкуренции и анализ проблем дифференциации продуктов.

В статье [10] рассматривается модель вертикальной дифференциации на рынке страхования. В ней была использована попятно-рекуррентная процедура построения абсолютного равновесия по Нэшу [7]. В работе приведены следующие результаты:

1) высокое качество страхования фирмы не всегда обеспечивает большую ожидаемую прибыль;

2) изменение наибольшего параметра качества имеет неоднозначное влияние на равновесную ожидаемую прибыль.

В [4] изложено обобщение модели поведения, предложенной в [14], в условиях олигополии и в условиях вертикальной дифференциации, а также методы и результаты исследования этих моделей. Здесь были получены важные для моей работы выводы:

1) в двухшаговой теоретико-игровой модели вертикальной дифференциации в условиях олигополистической конкуренции на первом шаге фирмы выбирают уровни качества своего товара, а на втором – назначают цены на свои товары;

2) для построения абсолютного равновесия по Нэшу в QP-модели сначала необходимо рассмотреть поведение фирм на втором шаге.

В статье [9] более глубоко исследуется модель вертикальной дифференциации на рынке страхования, представленной в [10], с учётом постоянных затрат различной структуры. Строится равновесие в ценах по Нэшу и Штакельбергу для случая обязательного страхования. Так же рассматривается добровольное страхование для монополии и дуополии.

Статья [13] посвящена изучению модели рыночного равновесия, в которой два участника предлагают продукцию, дифференцированную по качеству, и оба получают положительную прибыль.

В работе [3] построена и исследована теоретико-игровая модель управления качеством продукции в условиях конкуренции. Модель представляет собой двухшаговую игру фирм-производителей при неравномерном распределении склонности к качеству потребителей. В явном виде построено сильное равновесие в исследуемой модели, что позволило найти равновесные цены, доли рынка и доходы фирм-производителей.

В статье [8] изучается модель конкуренции двух фирм, производящих взаимозаменяемые товары, где спрос представлен большим количеством покупателей с идентичными предпочтениями, но дифференцированными по уровню дохода. Также предполагается, что покупатель приобретает только один продукт в рассматриваемый промежуток времени. В этой работе приводится процесс построения некооперативного решения, а также исследуется зависимость этого решения от распределения доходов и показателей качества.

Глава 1. Равновесие по Штакельбергу на этапе ценовой конкуренции

Для нахождения оптимального поведения фирм на этапе ценовой конкуренции можно использовать различные концепции равновесий или принципов оптимальности.

В этой главе используем модель поведения “лидер-последователь” и приведем ценовое равновесие по Штакельбергу, полученное в работе [9]. Рассмотрим ситуацию, когда фирма 1 (фирма с более низким качеством услуг) – лидер, а фирма 2 (фирма с более качественными услугами) - ведомый. Таким образом, фирма 2 следует своей функции реакции, учитывая цену p_1, которую выбрала фирма 1:

$$p_2(p_1) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{v}{v - 2\Delta q}\right)p_1 + \Delta q\bar{t} - \left(1 - \frac{v}{v - 2\Delta q}\right)\right], \tag{5}$$

где $\Delta q = q_2 - q_1$.

Принимая во внимание (5), фирма 1 пытается максимизировать свою функцию ожидаемой прибыли

$$\Pi_1\left(p_{1,}p_2(p_1)\right) = \frac{(p_1 + \bar{t} - \Delta q)(p_1(v - 4\Delta q) + v\bar{t}\,\Delta q)}{\bar{t} - (v - 2\Delta q)^2}.$$

Эта функция имеет единственный максимум когда

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = \frac{p_1(v - 4\Delta q) + 2\bar{t} - (q_2 - q_1)^2}{\bar{t} - (v - 2\Delta q)^2} = 0.$$

<u>Утверждение 1.1.</u> В модели цена-качество существует ценовое равновесие по Штакельбергу (фирма 1 - лидер, фирма 2 – последователь)

$$\begin{cases} p_1^{SE} = \dfrac{2\bar{t} - (\Delta q)^2}{-(v - 4\Delta q)}, \\ p_2^{SE} = \dfrac{3}{2} p_1 \end{cases} \qquad (6)$$

учитывая, что

$$v < 4(q_2 - q_1). \qquad (7)$$

Теперь перейдём к рассмотрению этапа конкуренции по качеству (в случае нулевых издержек). Принимая во внимание (6) и ограничение (7), функция ожидаемой прибыли фирмы 1 будет выглядеть следующим образом

$$\Pi_1(q_1, q_2) = \frac{\bar{t}(q_2 - q_1)^2}{-2(v - 4(q_2 - q_1))},$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{\bar{t}}{8}\left(\left(\frac{v}{v - 4(q_2 - q_1)}\right)^2 - 1\right) < 0,$$

учитывая, что

$$v < 2(q_2 - q_1). \qquad (8)$$

Следовательно, оптимальный уровень качества для фирмы 1 это $\underline{q}$.

Ожидаемая функция прибыли фирмы 2 может быть записана следующим образом:

$$\Pi_2(q_1, q_2) = -\frac{\bar{t}\left(v - 3(q_2 - q_1)\right)^2\left(v - 2(q_2 - q_1)\right)}{2\left(v - 4(q_2 - q_1)\right)^2},$$

тогда

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = -\frac{\bar{t}(5v - 12\Delta q)(v - 3\Delta q)(q_2 - q_1)}{(v - 4\Delta q)^3} > 0,$$

учитывая (8). Следовательно, оптимальный уровень качества для фирмы 2 есть $\overline{q}$.

Был исследован случай, когда фирма 2 (фирма с более высоким качеством услуг) – лидер, а фирма 1 – последователь. Найдём функцию реакции фирмы 1 из формулы (3):

$$\Pi_1(p_{1,}p_2) = \frac{1}{\bar{t}}\left[\frac{p_{2-}p_1}{q_2-q_1}p_1 - \frac{v}{2}\left(\frac{p_{2-}p_1}{q_2-q_1}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial p_1} = \frac{-\frac{p_1}{-q_1+q_2} + \frac{-p_1+p_2}{-q_1+q_2} + \frac{(-p_1+p_2)v}{(-q_1+q_2)^2}}{\bar{t}} = 0, \tag{9}$$

при условии ограничений (2).

Выразим из (9) p_1:

$$p_1(p_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{v+2\Delta q}\right)p2. \tag{10}$$

Принимая во внимание такое поведение фирмы 1, составим функцию ожидаемой прибыли для фирмы Π_2. Подставив (10) в (4), мы получим функцию прибыли для фирмы 2:

$$\Pi_2(p_1(p_2), p_2) = \frac{1}{\bar{t}}\left(\bar{t} - \frac{p_2 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{v+2\Delta q}\right)p_2}{q_2-q_1}\right) *$$

$$* \left(p_2 - \frac{1}{2}v\left(\bar{t} + \frac{p_2 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{v+2\Delta q}\right)p_2}{q_2-q_1}\right)\right).$$

Упростив, мы получили:

$$\Pi_2(p_1(p_2), p_2) =$$
$$= \frac{\left(p_2 - \bar{t}(2q_2 - 2q1 + v)\right)\left(\bar{t}v(2q_2 - 2q_1 + v) - p_2(4q_2 - 4q_1 + v)\right)}{2t(2q_2 - 2q_1 + v)^2} \tag{11}$$

Функция (11) имеет единственный максимум когда

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = \frac{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2 - p2(4q_2 - 4q_1 + v)}{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2} = 0,$$

так как $\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial {p_2}^2} = \frac{4q_1 - 4q_2 - v}{\bar{t}(-2q_1 + 2q_2 + v)^2} < 0$. Следовательно, можно сформулировать следующее утверждение:

<u>Утверждение 1.2.</u> Вектор цен (12) образует 2-равновесие по Штакельбергу на втором шаге двухшаговой игры в модели страхования для любых q_1, q_2, удовлетворяющих условиям (1) и (2).

$$\begin{cases} p_2 = \dfrac{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2}{4q_2 - 4q_1 + v}, \\ p_1 = \dfrac{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)(q_2 - q_1 + v)}{4q_2 - 4q_1 + v}. \end{cases} \tag{12}$$

Далее рассмотрим этап конкуренции по качеству, предполагая, что FC(q)=0. С учётом (12) функция ожидаемой прибыли фирмы 2 будет выглядеть:

$$\Pi_2(q_1, q_2) = \frac{2(q_1 - q_2)^2\,\bar{t}}{-4q_1 + 4q_2 + v}.$$

Тогда при условии (1)

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{4(q_2 - q_1)\,\bar{t}\,(2q_2 - 2q_1 + v)}{(4q_2 - 4q_1 + v)^2} > 0.$$

Значит, функция Π_2 является возрастающей по переменной q_2. Следовательно, оптимальный уровень качества фирмы 2 есть $q_2 = \bar{q}$.

Функция ожидаемой прибыли фирмы 1 может быть записана следующим образом

$$\Pi_1(q_1, q_2) = -\frac{\bar{t}(2q_1 - 2q_2 - v)^3}{2(-4q_1 + 4q_2 + v)^2},$$

тогда, учитывая (1) и (7),

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = -\frac{\bar{t}(4q_2 - 4q_1 - v)(2q_2 + 2q_1 - v)^2}{(4q_2 - 4q_1 + v)^3} < 0.$$

Значит, функция Π_1 является убывающей по переменной q_1. Следовательно, оптимальный уровень качества фирмы 1 есть $q_1 = \underline{q}$.

Теперь, сравним 2-равновесие по Штакельбергу с уже полученным случаем равновесия по Нэшу [9] и 1-равновесием по Штакельбергу на конкретном примере. Рассмотрим вектор параметров (учитывая ограничения всех рассматриваемых случаев):

$$v = \frac{1}{2};\ \bar{t} = 1;\ \underline{q} = 1; \bar{q} = 2. \tag{13}$$

В результате получаем, что прибыль первой фирмы, больше прибыли фирмы 1 в 1-равновесии по Штакельбергу. А относительно случая равновесия по Нэшу возрастает прибыль обоих фирм

$$\Delta\Pi^{2SE} = \Pi_2^{2SE} - \Pi_1^{2SE} \approx 0{,}941 - 0{,}63 = 0{,}311,$$

$$\Delta\Pi^{1SE} = \Pi_2^{1SE} - \Pi_1^{1SE} \approx 0{,}941 - 0{,}267 = 0{,}674,$$

$$\Delta\Pi^{NE} = \Pi_2^{NE} - \Pi_1^{NE} \approx 0{,}778 - 0{,}25 = 0{,}528.$$

Все полученные результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты сравнения равновесий при параметрах (13)

	p_2^{opt}	p_1^{opt}	$\Delta\boldsymbol{p}$	Π_1	Π_2	$\Delta\Pi$
1SE	1.6	1.067	0.533	0.267	0.941	0.674
2SE	2.382	1.324	1.058	0.63	0.941	0.311
NE	1.5	0.833	0.667	0.25	0.778	0.528

Теперь рассмотрим случай, когда постоянные издержки имеют линейный вид. А именно, $FC(q) = \alpha q$, при $\alpha > 0$. Принимая это во внимание, функции ожидаемой прибыли фирм 1 и 2 будут выглядеть следующим образом:

$$\Pi_1(q_1,q_2)=-\frac{\bar{t}(2q_1-2q_2-v)^3}{2(-4q_1+4q_2+v)^2}-\alpha q_1,$$

$$\Pi_2(q_1,q_2)=\frac{2(q_1-q_2)^2t}{-4q_1+4q_2+v}-\alpha q_2.$$

Тогда, учитывая (1) и (7),

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_1}=-\frac{\bar{t}(4q_2-4q_1-v)(2q_2+2q_1-v)^2}{(4q_2-4q_1+v)^3}-\alpha<0,$$

$$\frac{\partial\Pi_2}{\partial q2}=\frac{4(q_2-q1)\bar{t}(2q_2-2q_1+v)}{(4q_2-4q_1+v)^2}-\alpha>0.$$

Следовательно, оптимальный уровень качества для фирмы 1 (с учётом линейных постоянных издержек) является $\underline{q}$, а оптимальный уровень качества для фирмы 2 есть $\bar{q}$, при условии того что коэффициент α достаточно мал

$$\begin{cases}\alpha<\dfrac{4(q_2-q_1)t(2q_2-2q_1+v)}{(4q_2-4q_1+v)^2},\\ \alpha<\dfrac{2(q_1-q_2)^2t}{q_2(-4q_1+4q_2+v)}.\end{cases}$$

Глава 2. Анализ поведения монополии в модели страхования (случай необязательного страхования)

Здесь мы изменим предположение о том, что страховая услуга является обязательной для потребителей, т.е. мы исследуем так называемый “случай необязательного страхования”, когда потребители могут выбрать одну услугу из предлагаемых или же отказаться от всех.

Рассмотрим простейший случай, представленный в [9], когда одна фирма предлагает всем потребителям один контракт (q_1, p_1). Каждый потребитель в рассматриваемом случае необязательного страхования пытается максимизировать свою функцию потребительского излишка следующего вида:

$$U_t = \max\{0, tq_1 - p_1\}.$$

Функция ожидаемой прибыли фирмы будет выглядеть следующим образом:

$$\Pi(q_1, p_1) = \frac{1}{\bar{t}}\left[\left(\bar{t} - \frac{p_1}{q_1}\right)p_1 - \int_{\frac{p_1}{q_1}}^{\bar{t}} vtdt\right]. \tag{14}$$

Используя попятно-рекуррентную процедуру, найдём оптимальный контракт (q_1, p_1). Функция прибыли (14) имеет единственный максимум при

$$p^{mon} = \frac{\bar{t}{q_1}^2}{2q_1 - v}, \tag{15}$$

учитывая, что

$$v < 2q_1. \tag{16}$$

Следовательно, в случае нулевых издержек и учитывая (15), функция ожидаемой прибыли $\Pi(q_1)$ будет иметь вид:

$$\Pi(q_1) = \frac{\bar{t}}{2}\left(\frac{{q_1}^2}{2q_1 - v} - v\right).$$

Чтобы производная

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\bar{t} q_1 (q_1 - v)}{(2q_1 - v)^2}$$

была строго положительной, необходимо, чтобы $q_1 > v$. Следовательно, оптимальный уровень качества для фирмы в условиях монополии есть $\bar{q}$, если условие $v < \bar{q}$ выполняется. Тогда, оптимальное поведение (в случае монополии и отсутствия дифференциации продукта) – это предоставление максимального качества $\bar{q}$ и цены (15) при выполнении условия $v < \bar{q}$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда фирма предлагает потребителям два различных контракта (q_1, p_1) и (q_2, p_2), где $\underline{q} \leq q_1 < q_2 \leq \bar{q}$. Функция потребительского излишка потребителя будет выглядеть следующим образом:

$$U_t = \max\{0, tq_1 - p_1, tq_2 - p_2\}$$

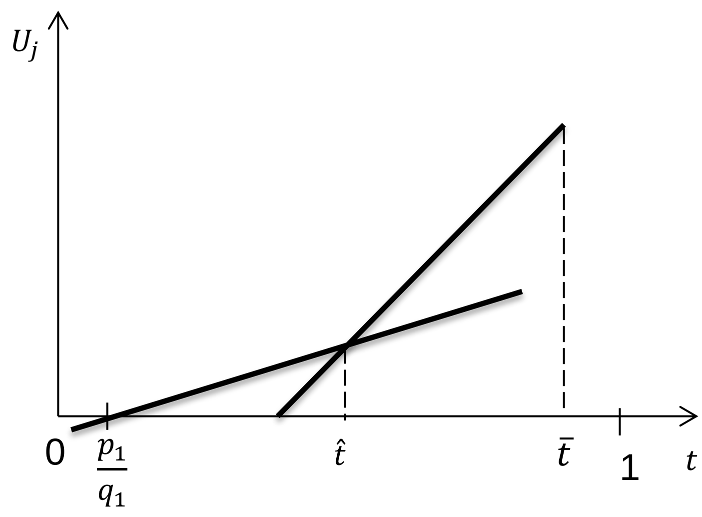

Рис. 2. Случай добровольного страхования

Функция ожидаемой прибыли будет иметь вид

$$\Pi(q_i, p_i) = \frac{1}{\bar{t}}\left[\left(\hat{t} - \frac{p_1}{q_1}\right)p_1 + (\bar{t} - \hat{t})p_2 - \int\limits_{\frac{p_1}{q_1}}^{\bar{t}} vtdt\right], i\epsilon\{1,2\}.$$

Чтобы максимизировать эту функцию прибыли, используем попятно-рекуррентную процедуру, начиная со второго шага (нахождения вектора оптимальных цен).

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Pi(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0, \\ \dfrac{\partial\Pi(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 0, \end{cases}$$

получаем единственное решение:

$$\begin{cases} p_1 = -\dfrac{\bar{t}q_1^2}{v - 2q_1}, \\ p_2 = \dfrac{\bar{t}}{2}\left(q_2 - \dfrac{vq_1}{v - 2q_1}\right), \end{cases}$$

которое является точкой максимума $\Pi(p_1, p_2)$, при условии (16).

Теперь рассмотрим первый этап (поиск оптимальных качеств). С учётом найденных цен функция ожидаемой прибыли может быть записана следующим образом

$$\Pi(q_1, q_2) = \frac{\bar{t}}{4}\left(q_2 - \frac{2v(v - \frac{3}{2}q_1)}{v - 2q_1}\right).$$

Производная

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -\frac{v^2 \bar{t}}{4(v - 2q_1)}$$

строго отрицательна, а производная

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = \frac{\bar{t}}{4}$$

строго положительна. Следовательно, оптимальный уровень качества q_1 есть $\underline{q}$, а оптимальный уровень качества q_2 есть $\overline{q}$.

Запишем полученные выражения

$$\begin{cases} q_1^{mon} = \underline{q}, \;\; p_1^{mon} = -\dfrac{\bar{t}\underline{q}^2}{v - 2\underline{q}}, \\ q_2^{mon} = \overline{q}, \;\; p_2^{mon} = \dfrac{\bar{t}}{2}\left(\overline{q} - \dfrac{v\underline{q}}{v - 2\underline{q}}\right), \end{cases}$$

$$\Pi^{mon} = \frac{\bar{t}}{4}\left(\overline{q} - \frac{2v(v - \frac{3}{2}\underline{q})}{v - 2\underline{q}}\right).$$

Когда фирма использует ценовую дифференциацию, она всегда имеет большую прибыль, нежели без её использования:

$$\Pi^{mon}\left(\underline{q}, \overline{q}\right) - \Pi^{mon}(\overline{q}) = \frac{v^2 \bar{t}\left(\overline{q} - \underline{q}\right)}{4\left(v - 2\underline{q}\right)(v - 2\overline{q})} > 0.$$

А сейчас рассмотрим ситуацию, когда одна фирма предлагает на выбор потребителям три различных страховых контракта $(q1, p1), (q2, p2), (q3, p3)$, где

$$\underline{q} \le q_1 < q_2 < q_3 \le \overline{q}. \tag{17}$$

Цель каждого потребителя в рассматриваемом случае - максимизировать свою функцию потребительского излишка следующего вида:

$$U_t = \max\{0, tq_1 - p_1, tq_2 - p_2, tq_3 - p_3\}$$

Функция ожидаемой прибыли фирмы будет выглядеть:

$$\Pi(q_i, p_i) = \frac{1}{\bar{t}}\left[\left(\hat{t}_2 - \frac{p_1}{q_1}\right)p_1 + (\hat{t}_3 - \hat{t}_2)p_2 + \left(\bar{t} - \hat{t}_3\right)p_3 - \int_{\frac{p_1}{q_1}}^{\bar{t}} vtdt\right], i\epsilon\{1,2,3\},$$

учитывая, что:

$$0 < \frac{p_1}{q_1} < \widehat{t_2} < \widehat{t_3} < \bar{t},$$

где $\widehat{t_2} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$, а $\widehat{t_3} = \frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2}$.

Чтобы максимизировать эту функцию прибыли, используем попятно-рекуррентную процедуру, начиная со второго шага (нахождения вектора оптимальных цен).

Составим и решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi\left(p_1, p_{2,} p_{3,}\right)}{\partial p_1} = \dfrac{2p_2 {q_1}^2 - p_1(q_1(2q_2 + v) - q_2 v)}{{q_1}^2(q_2 - q_1)\bar{t}} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi\left(p_1, p_{2,} p_{3,}\right)}{\partial p_2} = \dfrac{2(p_3(q_2 - q_1) - p_2(q_3 - q_1) + p_1(q_3 - q_2))}{(q_2 - q_1)(q_3 - q_2)\bar{t}} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi\left(p_1, p_2, p_{3,}\right)}{\partial p_3} = 1 - \dfrac{2(p_3 - p_2)}{(q_3 - q_2)\bar{t}} = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{{q_1}^2\bar{t}}{2q_1 - v}, \\ p_2 = \dfrac{\bar{t}(2q_1q_2 + q_1v - q_2v)}{2(2q_1 - v)}, \\ p_3 = \dfrac{\bar{t}(-q_3v + q_1(2q_3 + v))}{4q_1 - 2v}, \end{cases}$$

которое является точкой максимума функции ожидаемой прибыли $\Pi(q_i, p_i)_{i\epsilon\{1,2,3\}}$ при ограничениях (16) и (17).

Теперь рассмотрим первый этап (поиск оптимальных качеств). Функция ожидаемой прибыли $\Pi(q_1,\, q_{2,}\, q_3)$, может быть записана в виде:

$$\Pi\left(q_1, q_{2,} q_3\right) = \frac{\bar{t}(2q_1q_3 - (3q_1 + q_3)v + 2v^2)}{8q_1 - 4v}.$$

Как можно заметить, $\Pi\left(q_1, q_{2,} q_3\right)$ не зависит от q_2. Производная

$$\frac{\partial\Pi(q_1, q_3)}{\partial q_1} = -\frac{\bar{t}v^2}{4(-2q_1 + v)^2}$$

строго отрицательна, а производная

$$\frac{\partial\Pi(q_1, q_3)}{\partial q_3} = \frac{\bar{t}}{4}$$

строго положительна. Следовательно, оптимальный уровень качества q_1 есть $\underline{q}$, а оптимальный уровень качества q_3 есть $\bar{q}$.

Таким образом, функция прибыли $\Pi\left(q_1, q_{2,} q_3\right)$ будет выглядеть следующим образом

$$\Pi\left(q_1, q_{2,} q_3\right) = \frac{\bar{t}\left(2\underline{q}\bar{q} - \left(3\underline{q} + \bar{q}\right)v + 2v^2\right)}{8\underline{q} - 4v} = \frac{\bar{t}}{4}\left(\bar{q} - \frac{2v(v - \frac{3}{2}\underline{q})}{v - 2\underline{q}}\right), \tag{18}$$

что является результатом при рассматривании двух контрактов.

Таким образом, можно сделать вывод, что фирме не имеет смысла предлагать три контракта.

Рассмотрим альтернативное решение задачи максимизации функции прибыли $\Pi(q_i,p_i)_{i\epsilon\{1,2,3\}}$. Обозначим ограничения $0<\frac{p_1}{q_1}<\widehat{t_2}<\widehat{t_3}<\bar{t}$ следующим образом:

$$\begin{cases} g_1=\dfrac{p_1}{q_1}, \\ g_2=\widehat{t_2}-\dfrac{p_1}{q_1}, \\ g_3=\widehat{t_3}-\widehat{t_2}, \\ g_4=\bar{t}-\widehat{t_3}, \end{cases}$$

и воспользуемся теоремой Куна-Таккера.

Рассмотрим ЗНП:

$$\begin{cases} max\Pi(q_i,p_i), \\ g_j\geq 0, \\ i\in\{1,2,3\} \\ j\epsilon\{1,2,3,4\} \end{cases} \tag{19}$$

Условие регулярности в ЗНП считается выполненным. Пусть (p_i^*,q_i^*) - оптимальное решение (19). Следовательно, (p_i^*,q_i^*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера:

1. $g_j\geq 0, j=\overline{1,4}$ – условие допустимости.
2. $\exists\ \delta_j,\ j=\overline{1,4}$: $\vec{\nabla}\Pi(q_i,p_i)+\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j\,\vec{\nabla}q_j\right)=0$ – условие оптимальности.
3. $\delta_j g_j=0$ – условие дополняющей нежесткости.

Составим функцию Лагранжа для данной задачи:

$$\Pi(q_i,p_i)_{i\epsilon\{1,2,3\}}=\frac{1}{\bar{t}}\left[\left(\hat{t}_2-\frac{p_1}{q_1}\right)p_1+(\hat{t}_3-\hat{t}_2)p_2+\left(\bar{t}-\hat{t}_3\right)p_3-\int\limits_{\frac{p_1}{q_1}}^{\bar{t}}vtdt\right]+$$

$$+r_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)+r_2\left(\frac{(p_2-p_1)}{(q_2-q_1)}-\frac{p_1}{q_1}\right)+r_3\left(\frac{(p_3-p_2)}{(q_3-q_2)}-\frac{(p_2-p_1)}{(q_2-q_1)}\right)-$$

$$-r_4\left(\overline{t}-\frac{(p_3-p_2)}{(q_3-q_2)}\right).$$

Исходя из анализа решения задачи максимизации функции Лагранжа (см. Приложение 2), нетрудно заметить, что ни в одном из случаев функция прибыли не зависит одновременно от q_1, q_2, q_3.

Таким образом, решение задачи условной оптимизации приводит нас к решению, аналогичному (18).

Глава 3. Анализ модели страхования в случае треугольного распределения вероятности страхового случая

В этой главе рассмотрим ситуацию, когда две фирмы предлагают потребителям страховые услуги, и каждый потребитель может приобрести либо только одну услугу из предоставленных, либо отказаться ото всех. Мы изменим предположение о том, что параметр t, представляющий собой вероятность страхового случая, распределён равномерно на отрезке $[0, \bar{t}]$. А именно, предположим, что параметр t имеет треугольное распределение (также известное как распределение Симпсона) [3]. График плотности треугольного распределения изображен на Рис. 3:

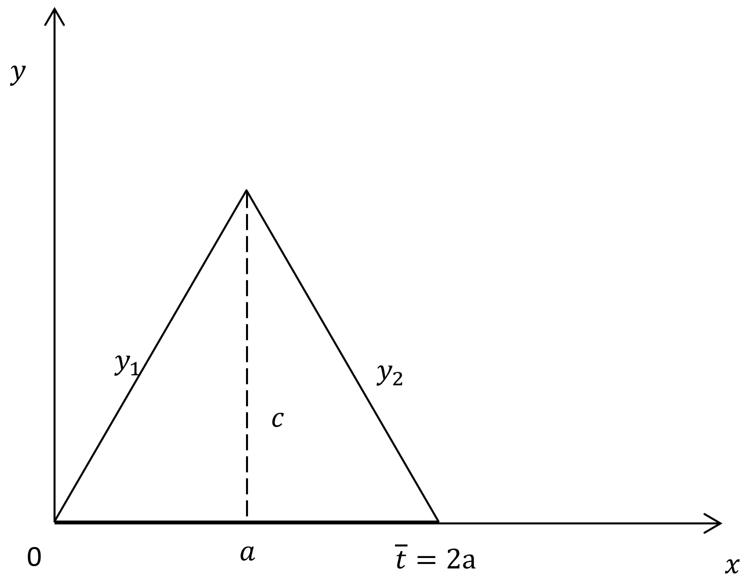

Рис. 3. Плотность треугольного распределения

Площадь этого треугольника равна $S_\Delta = ac = 1$, где $a = \frac{\bar{t}}{2}$. Отсюда можно найти уравнения прямых y_1 и y_2. Они будут выглядеть следующим образом:

$$y_1 = \frac{c}{a}x = \frac{1}{a_2}x, \qquad x \in [0, a],$$

$$y_2 = 2c - \frac{c}{a}x = \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}x, \qquad x \in [a, \bar{t}].$$

Теперь рассмотрим две ситуации, когда x попадает в отрезок $[0, a]$, и когда в отрезок $[a, \bar{t}]$. При $x \in [0, a]$, функция распределения $F(x)$ будет выглядеть так:

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{a^2} t dt = \frac{x^2}{2a^2}.$$

Если же $x \in [a, \bar{t}]$, то

$$F_2(x) = \frac{1}{2} + \int_a^x \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a^1} t\right) dt = \frac{1}{2a^2}(4ax - x^2) - 1.$$

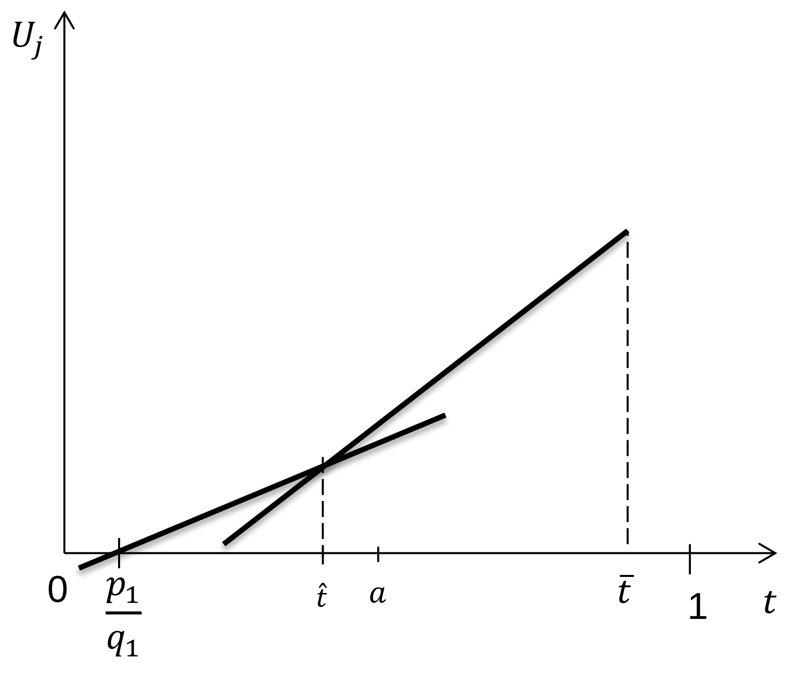

Рис. 4. Самоотбор потребителей

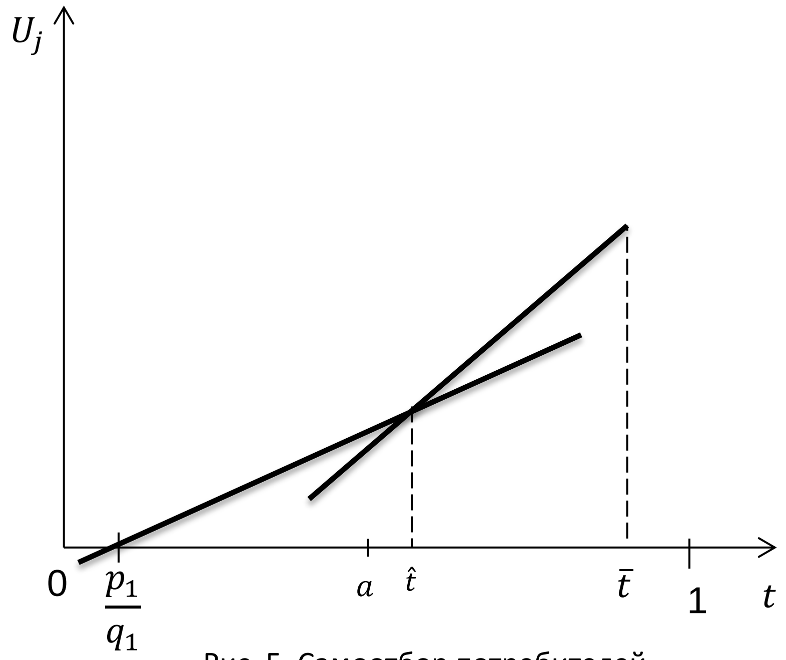

Рис. 5. Самоотбор потребителей

Из Рис. 4 и Рис. 5 видно, что доли рынка могут быть записаны двумя способами (в зависимости от расположения $\hat{t}$ – потребителя, для которого услуги обеих фирм одинаково привлекательны). То есть, если параметр $\hat{t}$ будет принадлежать промежутку $[a, \bar{t}]$, то доли рынка первой и второй фирм соответственно будут выглядеть

$$D_1 = F_2(\hat{t}) - F_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = \frac{1}{\bar{t}}\left(2\bar{t}\hat{t} - \hat{t}^2\right) - 1 - \frac{2p_1^2}{\overline{t^2}q_1^2},$$
$$D_2 = F_2(\bar{t}) - F_2(\hat{t}) = \frac{2}{\overline{t^2}}\left(\overline{t^2} - 2\bar{t}\hat{t} + \hat{t}^2\right). \qquad (20)$$

Если же параметр $\hat{t}$ будет принадлежать отрезку $[\frac{p_1}{q_1}, a]$, то доли рынка фирм будут выглядеть:

$$D_1 = F_1(\hat{t}) - F_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = \frac{2}{\overline{t^2}}\left(\hat{t}^2 - \frac{{p_1}^2}{{q_1}^2}\right),$$
$$D_2 = F_2(\bar{t}) - F_1(\hat{t}) = 1 - \frac{2\hat{t}^2}{\bar{t}^2}. \qquad (21)$$

Таким образом, используя полученные доли рынка (20) и (21), мы можем составить функции прибыли для обеих фирм.

$$\Pi_1 = \frac{1}{\overline{t}}\left[D_1 p_1 - \int_0^{\hat{t}} vt\, dt\right],$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{\overline{t}}\left[D_2 p_2 - \int_{\hat{t}}^{\overline{t}} vt\, dt\right].$$

$$\Pi_1{}^{\hat{t}\in[a,\overline{t}]} = \frac{1}{\overline{t}}\left[p_1\left(\frac{(p_1-p_2)\left(-p_1+p_2+2(q_1-q_2)\overline{t}\right)}{(q_1-q_2)^2\overline{t^2}} - 1 - \frac{2p_1{}^2}{q_1{}^2\overline{t^2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{p_1{}^2 v}{2q_1{}^2} - \frac{(p_1-p_2)^2 v}{2(q_1-q_2)^2}\right], \tag{22}$$

$$\Pi_2{}^{\hat{t}\in[a,\overline{t}]} = \frac{1}{\left(2(q_1-q_2)^2\overline{t^3}\right)}\left[\left(-p_1+p_2+(q_1-q_2)\overline{t}\right) * \right.$$
$$\left. * \left(4p_2\left(-p_1+p_2+(q_1-q_2)\overline{t}\right) + \overline{t^2}v\left(-p_1+p_2+\overline{t}(-q_1+q_2)\right)\right)\right]; \tag{23}$$

$$\Pi_1{}^{\hat{t}\in[\frac{p_1}{q_1},a]} = \frac{(2p_1q_1 - p_2q_1 - p_1q_2)(-p_2q_1 + p_1q_2)(4p_1 - \overline{t}^2 v)}{2q_1{}^2(q_1-q_2)^2\overline{t}^3}, \tag{24}$$

$$\Pi_2{}^{\hat{t}\in[\frac{p_1}{q_1},a]} = \frac{1}{\overline{t}}\left[p_2 - \frac{2(p_1-p_2)^2 p_2}{(q_1-q_2)^2\overline{t^2}} + \frac{(p_1-p_2)^2 v}{2(q_1-q_2)^2} - \frac{\overline{t^2}v}{2}\right]. \tag{25}$$

Получить равновесие по Нэшу в аналитическом виде нам не удалось в виду сложности выражений для решений системы уравнений. Проведем численное моделирование, подставив конкретные значения параметров, и попробуем найти значения для функции прибыли. Рассмотрим случай, когда $\hat{t} \in [a, \overline{t}]$. Используя вектор параметров

$$q_1 = 4, q_2 = 6,\ p_2 = 2.686, \overline{t} = 1, v = 0.1,$$

получим функцию

$$\Pi_1^{\hat{t}\in\left[\frac{p_1}{q_1},a\right]} = p_1\left(-1+\frac{1}{4}(-1.3143777018079024-p_1)*\right.$$
$$\left.*\,(-2.6856222981920976+p_1)-\frac{{p_1}^2}{8}\right). \quad (26)$$

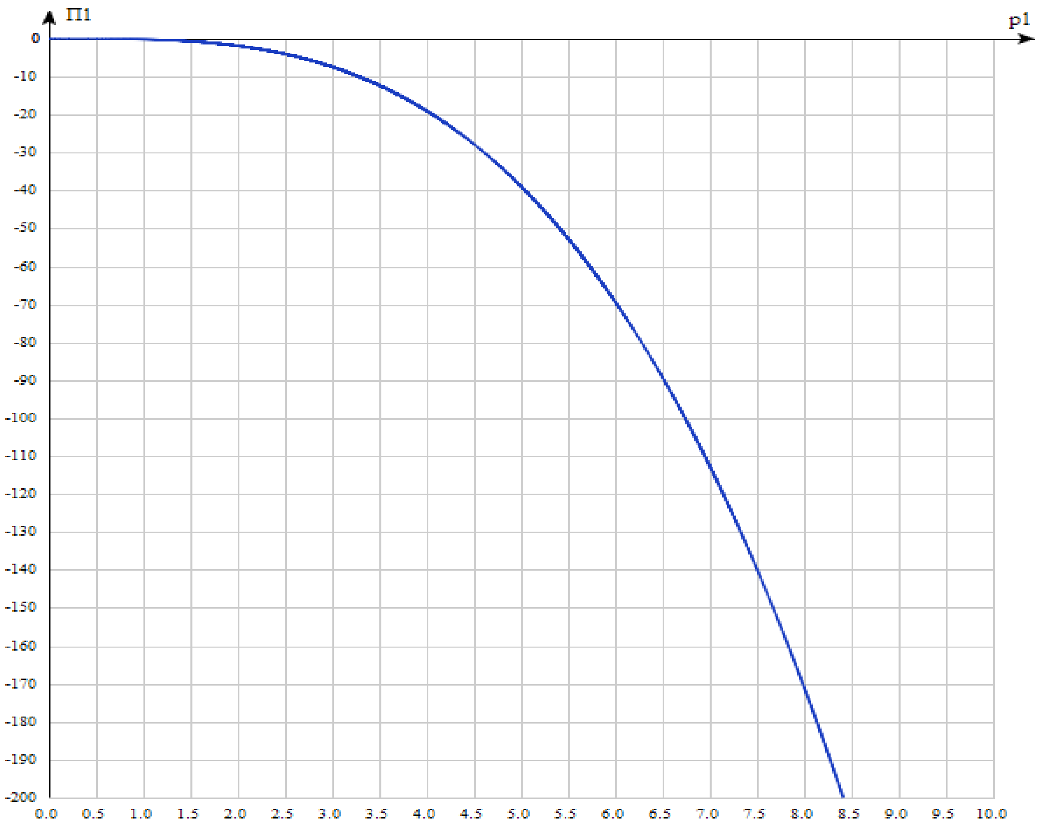

Рис.6. График функции (26)

Серия численных экспериментов с параметрами q_1, q_2, p_2, v, t показала, что функция (26) отрицательна и убывает на всем промежутке $p_1 \in [0, +\infty]$.

Рассмотрим второй случай, когда $\hat{t} \in [\frac{p_1}{q_1}, a]$. Используем следующий вектор параметров:

$$p_1 = 0.3, p_2 = 2, q_1 = 1, q_2 = 5, v = 0.1, \quad (27)$$

и исследуем поведение функций прибыли фирм при изменении параметра $\bar{t}$, определяющего максимальную вероятность страхового случая.

Тогда

$$\Pi_1^{\hat{t}\in[\frac{p_1}{q_1},a]} = \frac{0.0453125(1.2\ - 0.1\bar{t}^2)}{\bar{t}^3}, \tag{28}$$

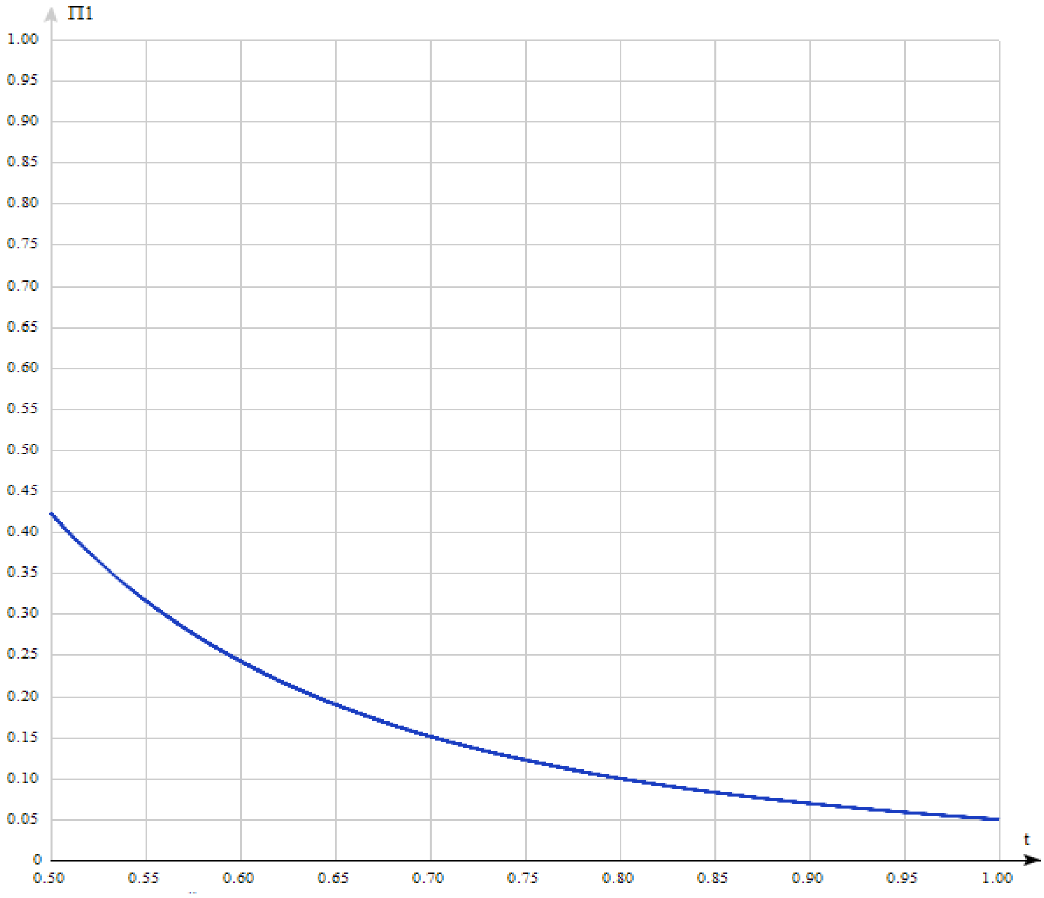

Рис.7. График функции (28)

При использовании вектора параметров (27), функция прибыли (28) убывает при увеличении параметра $\bar{t}$ (см. Рис. 7). Это значит, что при увеличении максимальной вероятности страхового случая, фирма 1 будет нести убытки.

Теперь рассмотрим функцию прибыли второй фирмы при заданном векторе параметров (27):

$$\Pi_2^{\hat{t}\in[\frac{p_1}{q_1},a]} = \frac{2.00903125 - \frac{0.7224999999999999}{\bar{t}^2} - 0.05\bar{t}^2}{\bar{t}}. \tag{29}$$

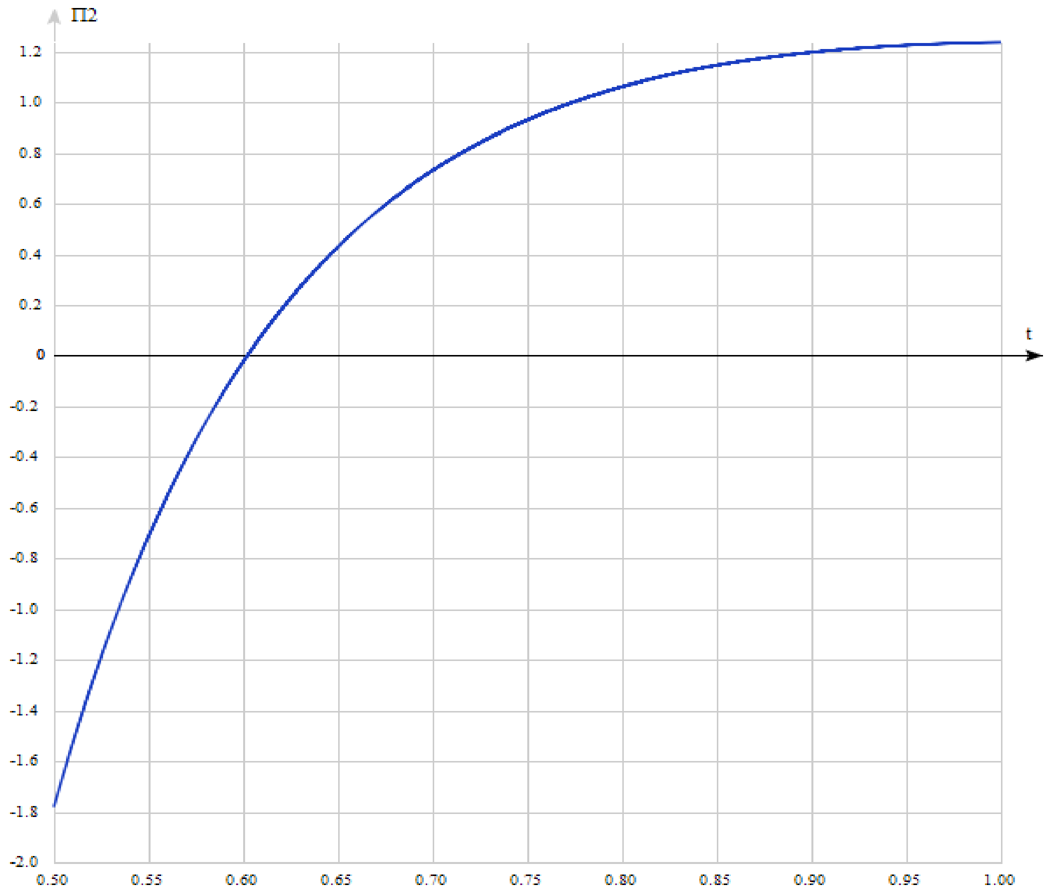

Рис.8. График функции (29)

График, изображенный на Рис. 8 показывает, что при использовании вектора параметров (27), функция прибыли (29) возрастает при увеличении параметра $\bar{t}$. Следовательно, при увеличении максимальной вероятности страхового случая прибыль фирмы 2 будет также увеличиваться.

Заключение

1. В модели лидер – последователь было построено 2-равновесие по Штакельбергу (было показано, что имеет место максимальная вертикальная дифференциация) и приведен сравнительный анализ с результатами других работ. Так же был рассмотрен случай линейных издержек;

2. В случае добровольного страхования при монопольном ценообразовании был построен вектор оптимальных цен. Было показано, что одна из долей рынка образует пустое множество, следовательно, фирме не имеет смысла предлагать три контракта;

3. Был рассмотрен случай дуополии для рынка добровольного страхования с учётом того, что вероятность страхового случая имеет треугольное распределение. Были найдены доли рынка для обеих фирм, с учётом которых также построены функции прибыли. Изучено поведение функций прибыли фирм в зависимости от значения максимальной вероятности страхового случая при заданных остальных параметрах.

Список литературы

1. Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, Гл. ред. ФИЗМАТЛИТ, 2002. 824 с.
3. Гладкова М. А., Зенкевич Н. А. Теоретико-игровая модель управления качеством в условиях конкуренции // Управление большими системами сборник трудов, 2010. С. 239-262
4. Кузютин Д. В. Экономико-математические модели олигополии. Модели вертикальной дифференциации. Тема 6. С. 14-24
5. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2010. 448 с.
6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 432 с.
7. Петросян Л. А., Кузютин Д. В. Устойчивые решения позиционных игр. СПб.: Издательство СПбГУ, 2008. 326 с.
8. Gabszewicz J., Thisse J.-F. Price competition, quality and income disparities // Journal of Economic Theory, 1979. № 20. P. 340-359.
9. Kuzyutin D. V., Nikitina M. V., Smirnova N. V., Razgulyaeva L. N. The vertical differentiation model in the insurance market: costs structure and equilibria analysis // Contributions to Game Theory and Management, 2015. P. 176-186
10. Okura M. The vertical differentiation model in the insurance market // International Journal of Economics and Business Modeling, 2010. № 1(2). P. 12–14.

11. Schlesinger H., Schulenburg J. Search costs, switching cost and product heterogeneity in an insurance market // M.G.V.D. Journal of Risk and Insurance, 1991. № 58. P. 109-119.
12. Schlesinger H., Schulenburg J. Consumer information and decisions to switch Insurers. // M.G.V.D. Journal of Risk and Insurance, 1993. № 60. P. 591-615.
13. Shaked, A., Sutton J. Relaxing price competition through product differentiation // Review of Economic Studies, 1982. № 49. P. 3-13.
14. Tirole J. The theory of industrial organization. Cambridge: The MIT Press, MA. 1988. 943 p.

Приложение

Приложение 1:

```
(((p2+t (2 q1-2 q2-v)) (p2 (4 q1-4 q2-v)+t v (-2 q1+2 q2+v)))/(2 t (-2 q1+2
q2+v)^2))(*П2(p1(p2),p2)*)
D[((t-(p2-1/2 p2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(-q1+q2)) (p2-1/2 v (t+(p2-1/2 p2 (1+v/(2 (-
q1+q2)+v)))/(-q1+q2))))/t,p2](*П(p1(p2),p2)находим максимум ф-ии*)
((1-(v (1+1/2 (-1-v/(2 (-q1+q2)+v))))/(2 (-q1+q2))) (t-(p2-1/2 p2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(-
q1+q2)))/t-((1+1/2 (-1-v/(2 (-q1+q2)+v))) (p2-1/2 v (t+(p2-1/2 p2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(-
q1+q2))))/((-q1+q2) t)
FullSimplify[((1-(v (1+1/2 (-1-v/(2 (-q1+q2)+v))))/(2 (-q1+q2))) (t-(p2-1/2 p2 (1+v/(2 (-
q1+q2)+v)))/(-q1+q2)))/t-((1+1/2 (-1-v/(2 (-q1+q2)+v))) (p2-1/2 v (t+(p2-1/2 p2 (1+v/(2 (-
q1+q2)+v)))/(-q1+q2))))/((-q1+q2) t)]
(p2 (4 q1-4 q2-v)+t (-2 q1+2 q2+v)^2)/(t (-2 q1+2 q2+v)^2)
D[(p2 (4 q1-4 q2-v)+t (-2 q1+2 q2+v)^2)/(t (-2 q1+2 q2+v)^2),p2]
(4 q1-4 q2-v)/(t (-2 q1+2 q2+v)^2)
Solve[(p2 (4 q1-4 q2-v)+t (-2 q1+2 q2+v)^2)/(t (-2 q1+2 q2+v)^2)==0,p2]
{{p2->(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))}}(*p2*)
(1/t)*((((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))-p1)/(q2-q1))*(p1-(v/2)*(((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-
v)-p1)/(q2-q1)))(*П1(p1(p2),q1q2)*)
((-p1+(t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)) (p1-((-p1+(t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)) v)/(2 (-
q1+q2))))/((-q1+q2) t)
FullSimplify[((-p1+(t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)) (p1-((-p1+(t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))
v)/(2 (-q1+q2))))/((-q1+q2) t)]
-(((2 q1-2 q2-v) (p1 (4 q1-4 q2-v)+t (2 q1-2 q2-v) v) (t (-2 q1+2 q2+v)^2+p1 (-4 q1+4 q2+v)))/(2
(q1-q2)^2 t (-4 q1+4 q2+v)^2))
FullSimplify[1/2 (-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))) (1+v/(2 (-q1+q2)+v))]
(-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v)))(*p1*)
FullSimplify[1/t (t-(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))+(t (2 q1-2 q2-v)^2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(2
(4 q1-4 q2-v)))/(-q1+q2)) ((4 t (2 q1-2 q2-v))/(4 q1-4 q2-v)-(4 t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)^2-
1/2 v (1/(-q1+q2) ((4 t (2 q1-2 q2-v))/(4 q1-4 q2-v)-(4 t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)^2-(t (2 q1-2
q2-v)^2 v)/((4 q1-4 q2-v) (2 (-q1+q2)+v)^2)-(2 t (2 q1-2 q2-v) (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(4 q1-4 q2-
v)+(2 t (2 q1-2 q2-v)^2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(4 q1-4 q2-v)^2)-(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-
v))+(t (2 q1-2 q2-v)^2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(2 (4 q1-4 q2-v)))/(-q1+q2)^2))+1/t (-1/(-q1+q2) ((4 t
(2 q1-2 q2-v))/(4 q1-4 q2-v)-(4 t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)^2-(t (2 q1-2 q2-v)^2 v)/((4 q1-4 q2-
v) (2 (-q1+q2)+v)^2)-(2 t (2 q1-2 q2-v) (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(4 q1-4 q2-v)+(2 t (2 q1-2 q2-v)^2
(1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(4 q1-4 q2-v)^2)+(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))+(t (2 q1-2 q2-v)^2
(1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(2 (4 q1-4 q2-v)))/(-q1+q2)^2) (-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))-1/2 v
(t+(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))+(t (2 q1-2 q2-v)^2 (1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(2 (4 q1-4 q2-
v)))/(-q1+q2)))]
((4 (q1-q2) t (2 q1-2 q2-v))/(-4 q1+4 q2+v)^2)(*дП2/дq2*)

FullSimplify[1/t (t-((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))-1/2 (-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-
v)))(1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(-q1+q2)) ((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))-1/2 v (t+((-((t (2 q1-2
q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))-1/2 (-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))(1+v/(2 (-q1+q2)+v)))/(-
q1+q2)))](*П2(Q1Q2)*)
D[(2 (q1-q2)^2 t)/(-4 q1+4 q2+v),q2]
FullSimplify[-((8 (q1-q2)^2 t)/(-4 q1+4 q2+v)^2)-(4 (q1-q2) t)/(-4 q1+4 q2+v)]
(4 (q1-q2) t (2 q1-2 q2-v))/(-4 q1+4 q2+v)^2
```

```
π1:
(1/t)(((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))-(-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v))))/(q2-q1))((-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v)))-(v/2)*((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))-(-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v))))/(q2-q1))
FullSimplify[((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))+(t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v)) (-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v))-((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))+(t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v)) v)/(2 (-q1+q2))))/((-q1+q2) t)]
-((t (2 q1-2 q2-v)^3)/(2 (-4 q1+4 q2+v)^2))(*Π1(q1,q2)*)

D[-((t (2 q1-2 q2-v)^3)/(2 (-4 q1+4 q2+v)^2)),q1]
FullSimplify[-((4 t (2 q1-2 q2-v)^3)/(-4 q1+4 q2+v)^3)-(3 t (2 q1-2 q2-v)^2)/(-4 q1+4 q2+v)^2]
-((t (4 q1-4 q2+v) (-2 q1+2 q2+v)^2)/(4 q1-4 q2-v)^3)
π2:
(1/t)(t-(p2-p1)/(q2-q1))(p2-(v/2)(t+(p2-p1)/(q2-q1)))
FullSimplify[(1/t)(-((-(-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v)))+(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))))/(-q1+q2))+t) ((-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v)))-1/2 ((-(-((t (2 q1-2 q2-v) (q1-q2-v))/(4 q1-4 q2-v)))+(-((t (2 q1-2 q2-v)^2)/(4 q1-4 q2-v))))/(-q1+q2)+t) v)]
((2 (q1-q2)^2 t)/(-4 q1+4 q2+v)) (*Π2(q1,q2)*)
-((t (2 q1-2 q2-v)^3)/(2 (-4 q1+4 q2+v)^2))(*Π1(q1,q2)*)
(2 *(1-3)^2 *1)/(-4* 1+4* 3+(1/2))
```

Приложение 2:

Решение задачи методом Куна-Таккера

((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t+r1(p1/q1)+r2((p2-p1)/(q2-q1)-p1/q1)+r3((p3-p2)/(q3-q2)-(p2-p1)/(q2-q1))-r4(t-(p3-p2)/(q3-q2))

(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t

q=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,p1]

r1/q1+(-(1/q1)-1/(-q1+q2)) r2+r3/(-q1+q2)+((2 p2)/(-q1+q2)+(p1 ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/q1^{2})/t

w=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,p2]

r2/(-q1+q2)+(-(1/(-q1+q2))-1/(-q2+q3)) r3-r4/(-q2+q3)+((2 p1)/(-q1+q2)+2 p2 (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+(2 p3)/(-q2+q3))/t

e=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,p3]

r3/(-q2+q3)+r4/(-q2+q3)+((2 p3)/(q2-q3)+(2 p2)/(-q2+q3)+t)/t

```
Out[27]=(t (-2 q1+v))/(8 q1-4 v)
```

d=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,r1]

p1/q1

f=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,r2]

-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)

z=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,r3]

-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)

x=D[(p1 r1)/q1+(-(p1/q1)+(-p1+p2)/(-q1+q2)) r2+(-((-p1+p2)/(-q1+q2))+(-p2+p3)/(-q2+q3)) r3-r4 (-((-p2+p3)/(-q2+q3))+t)+((2 p1 p2)/(-q1+q2)+p2^{2} (1/(q1-q2)+1/(q2-q3))+p3^{2}/(q2-q3)+(2 p2 p3)/(-q2+q3)+p3 t-(t^{2} v)/2+(p1^{2} ((2 q1 q2)/(q1-q2)+v))/(2 q1^{2}))/t,r4]

(-p2+p3)/(-q2+q3)-t

Solve[q==0 && w==0 && e==0 && x*r4==0&&z*r3==0&&f*r2==0 &&d*r1==0,{p1,p2,p3,r1,r2,r3,r4}]

{{p1->0,p2->0,p3->0,r1->-q3,r2->q1-q3,r3->q2-q3,r4->0},{p1->0,p2->0,p3->-q2 t+q3 t,r1->-q2,r2->q1-q2,r3->0,r4->-q2+q3},{p1->0,p2->1/2 (-q1 t+q2 t),p3->1/2 (-q1 t+q3 t),r1->-q1,r2->0,r3->0,r4->0},{p1->0,p2->-q1 t+q2 t,p3->-q1 t+q3 t,r1->-q1,r2->0,r3->q1-q2,r4->-q1+q3},{p1->0,p2->0,p3->1/2 (-q2 t+q3 t),r1->-q2,r2->q1-q2,r3->0,r4->0},{p1->0,p2->1/2 (-q1

t+q2 t),p3->1/2 (-q1 t-q2 t+2 q3 t),r1->-q1,r2->0,r3->0,r4->-q2+q3},{p1->0,p2->1/2 (-q1 t+q2
t),p3->1/2 (-q1 t+q3 t),r1->-q1,r2->0,r3->0,r4->0},{p1->q1 t,p2->q2 t,p3->q3 t,r1->0,r2->-
q1+v,r3->-q2+v,r4->q3-v},{p1->(q1^{2} t)/(2 q1-v),p2->-((-2 q1 q2 t-q1 t v+q2 t v)/(2 (2 q1-
v))),p3->-((-2 q1 q3 t-q1 t v+q3 t v)/(2 (2 q1-v))),r1->0,r2->0,r3->0,r4->0},{p1->(q1 q2 t)/(2 q2-
v),p2->(q2^{2} t)/(2 q2-v),p3->-((q2^{2} t-2 q2 q3 t-q2 t v+q3 t v)/(2 q2-v)),r1->0,r2->-(((q1-q2) v)/(2
q2-v)),r3->0,r4->-q2+q3},{p1->(q1 q3 t)/(2 q3-v),p2->(q2 q3 t)/(2 q3-v),p3->(q3^{2} t)/(2 q3-v),r1-
>0,r2->-((q1 v-q3 v)/(2 q3-v)),r3->-(((q2-q3) v)/(2 q3-v)),r4->0},{p1->(q1^{2} t)/(2 q1-v),p2->-((t
(q1^{2}-2 q1 q2-q1 v+q2 v))/(2 q1-v)),p3->-((q1^{2} t-2 q1 q3 t-q1 t v+q3 t v)/(2 q1-v)),r1->0,r2->0,r3-
>q1-q2,r4->-q1+q3},{p1->(q1 q2 t)/(2 q2-v),p2->(q2^{2} t)/(2 q2-v),p3->-((-2 q2 q3 t-q2 t v+q3 t
v)/(2 (2 q2-v))),r1->0,r2->-(((q1-q2) v)/(2 q2-v)),r3->0,r4->0},{p1->(q1^{2} t)/(2 q1-v),p2->(t (2 q1
q2+q1 v-q2 v))/(2 (2 q1-v)),p3->-((2 q1 q2 t-4 q1 q3 t-q1 t v-q2 t v+2 q3 t v)/(2 (2 q1-v))),r1-
>0,r2->0,r3->0,r4->-q2+q3},{p1->(q1^{2} t)/(2 q1-v),p2->(t (2 q1 q2+q1 v-q2 v))/(2 (2 q1-v)),p3->-
((-2 q1 q3 t-q1 t v+q3 t v)/(2 (2 q1-v))),r1->0,r2->0,r3->0,r4->0}}

Приложение 3:

FullSimplify[1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2)-1-t1^2/(2*(t/2)^2)]
$1-(2 t1^{2})/t^{2}$
1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2)-1-t1^2/(2*(t/2)^2)
$1-(2 t1^{2})/t^{2}$
FullSimplify[1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t1-t1^2)-1-p1^2/(2*(t/2)^2*q1^2)]
$-1-(2 (p1^{2}+q1^{2} t1 (-2 t+t1)))/(q1^{2} t^{2})$
P1=FullSimplify[(1/t)*(p1/(2*(t/2)^2)*(t1^2-(p1/q1)^2)-v*t1^2/2+v*p1^2/(2*q1^2))](*П1*)
$-(((-p1+q1 t1) (p1+q1 t1) (-4 p1+t^{2} v))/(2 q1^{2} t^{3}))$
(1/t)*(p2*(1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2)-1-t1^2/(2*(t/2)^2))-v*t^2/2+v*t1^2/2)(*П2*)
$(p2 (1-(2 t1^{2})/t^{2})-(t^{2} v)/2+(t1^{2} v)/2)/t$
FullSimplify[(1/t)*(p2*(1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2)-1-t1^2/(2*(t/2)^2))-v*t^2/2+v*t1^2/2)]
$(2 p2 t^{2}-4 p2 t1^{2}-t^{4} v+t^{2} t1^{2} v)/(2 t^{3})$
(1/t)*(p1*((1/t^2)*(2*t*t1-t1^2)-1-(2*p1^2)/(t^2*q1^2))-v*t1^2/2+v*p1^2/(2*q1^2))(*П1(2)*)
$(p1 (-1-(2 p1^{2})/(q1^{2} t^{2})+(2 t t1-t1^{2})/t^{2})+(p1^{2} v)/(2 q1^{2})-(t1^{2} v)/2)/t$
FullSimplify[(1/t)*(p1*((1/t^2)*(2*t*t1-t1^2)-1-(2*p1^2)/(t^2*q1^2))-
v*t1^2/2+v*p1^2/(2*q1^2))]
$(-2 p1 (2 p1^{2}+q1^{2} (t-t1)^{2})+t^{2} (p1-q1 t1) (p1+q1 t1) v)/(2 q1^{2} t^{3})$
(1/t)*(p2/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2-4*(t/2)*t1-t1^2)-v*t^2/2+v*t1^2/2)(*П2(2)*)
$((2 p2 (t^{2}-2 t t1-t1^{2}))/t^{2}-(t^{2} v)/2+(t1^{2} v)/2)/t$
FullSimplify[(1/t)*(p2/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2-4*(t/2)*t1-t1^2)-v*t^2/2+v*t1^2/2)]
$(4 p2 (t^{2}-2 t t1-t1^{2})+t^{2} (-t^{2}+t1^{2}) v)/(2 t^{3})$
$FullSimplify[D[-(((-p1+q1 t1) (p1+q1 t1) (-4 p1+t^{2} v))/(2 q1^{2} t^{3})),p1]]$
$(-6 p1^{2}+2 q1^{2} t1^{2}+p1 t^{2} v)/(q1^{2} t^{3})$
$D[(2 p2 t^{2}-4 p2 t1^{2}-t^{4} v+t^{2} t1^{2} v)/(2 t^{3}),p2]$
$(2 t^{2}-4 t1^{2})/(2 t^{3})$
$FullSimplify[D[(-2 p1 (2 p1^{2}+q1^{2} (t-t1)^{2})+t^{2} (p1-q1 t1) (p1+q1 t1) v)/(2 q1^{2} t^{3}),p1]]$
$(-6 p1^{2}-q1^{2} (t-t1)^{2}+p1 t^{2} v)/(q1^{2} t^{3})$
$FullSimplify[D[(4 p2 (t^{2}-2 t t1-t1^{2})+t^{2} (-t^{2}+t1^{2}) v)/(2 t^{3}),p2]]$
$(2 (t^{2}-2 t t1-t1^{2}))/t^{3}$
1/t (2t*t1-t1^2)-1-(2p1^2)/(t^2*q1^2)
$FullSimplify[-1-(2 p1^{2})/(q1^{2} t^{2})+(2 t t1-t1^{2})/t]$
$-1+2 t1-((2 p1^{2})/q1^{2}+t t1^{2})/t^{2}$
FullSimplify[(1/t)*(p1/(2*(t/2)^2)*(((p2-p1)/(q2-q1))^2-(p1/q1)^2)-v*((p2-p1)/(q2-
q1))^2/2+v*p1^2/(2*q1^2))](*П1(1)*)
$((2 p1 q1-p2 q1-p1 q2) (-p2 q1+p1 q2) (4 p1-t^{2} v))/(2 q1^{2} (q1-q2)^{2} t^{3})$
(1/t)*(p2*(1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2)-1-t1^2/(2*(t/2)^2))-v*t^2/2+v*t1^2/2)
$(p2 (1-(2 t1^{2})/t^{2})-(t^{2} v)/2+(t1^{2} v)/2)/t$
FullSimplify[(1/t)*(p2*(1/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2)-1-((p2-p1)/(q2-q1))^2/(2*(t/2)^2))-
v*t^2/2+v*((p2-p1)/(q2-q1))^2/2)](*П2(1)*)
$(p2-(2 (p1-p2)^{2} p2)/((q1-q2)^{2} t^{2})+((p1-p2)^{2} v)/(2 (q1-q2)^{2})-(t^{2} v)/2)/t$
$FullSimplify[(2 p2 t^{2}-4 p2 ((p2-p1)/(q2-q1))^{2}-t^{4} v+t^{2} ((p2-p1)/(q2-q1))^{2} v)/(2 t^{3})]$
$(-((4 (p1-p2)^{2} p2)/(q1-q2)^{2})+2 p2 t^{2}+((p1-p2)^{2} t^{2} v)/(q1-q2)^{2}-t^{4} v)/(2 t^{3})$
FullSimplify[(1/t)*(p1*((1/t^2)*(2*t*((p2-p1)/(q2-q1))-((p2-p1)/(q2-q1))^2)-1-
(2*p1^2)/(t^2*q1^2))-v*((p2-p1)/(q2-q1))^2/2+v*p1^2/(2*q1^2))](*П1(2)*)
$(p1 (-1-(2 p1^{2})/(q1^{2} t^{2})+((p1-p2) (-p1+p2+2 (q1-q2) t))/((q1-q2)^{2} t^{2}))+(p1^{2} v)/(2 q1^{2})-((p1-p2)^{2} v)/(2 (q1-q2)^{2}))/t$
FullSimplify[(1/t)*(p2/(2*(t/2)^2)*(4*(t/2)*t-t^2-4*(t/2)*((p2-p1)/(q2-q1))+((p2-p1)/(q2-
q1))^2)-v*t^2/2+v*((p2-p1)/(q2-q1))^2/2)](*П2(2)*)
$((-p1+p2+(q1-q2) t) (4 p2 (-p1+p2+(q1-q2) t)+t^{2} (-p1+p2+(-q1+q2) t) v))/(2 (q1-q2)^{2} t^{3})$

FullSimplify[D[(1/t)*(p1*((1/t^2)*(2*t*((p2-p1)/(q2-q1))-((p2-p1)/(q2-q1))^2)-1-(2*p1^2)/(t^2*q1^2))-v*((p2-p1)/(q2-q1))^2/2+v*p1^2/(2*q1^2)),p1]]

$1/(q1^2\ (q1-q2)^2\ t^3)\ (-3\ p1^2\ (3\ q1^2-4\ q1\ q2+2\ q2^2)+4\ p1\ q1^2\ (p2+(q1-q2)\ t)+p1\ q2\ (-2\ q1+q2)\ t^2\ v+q1^2\ (-(p2+(q1-q2)\ t)^2+p2\ t^2\ v))$

FullSimplify[D[$((-p1+p2+(q1-q2)\ t)\ (4\ p2\ (-p1+p2+(q1-q2)\ t)+t^2\ (-p1+p2+(-q1+q2)\ t)\ v))/(2\ (q1-q2)^2\ t^3)$,p2]]

$(2\ (p1-3\ p2+(-q1+q2)\ t)\ (p1-p2+(-q1+q2)\ t)+(-p1+p2)\ t^2\ v)/((q1-q2)^2\ t^3)$

$k=1/(q1^2\ (q1-q2)^2\ t^3)\ (-3\ p1^2\ (3\ q1^2-4\ q1\ q2+2\ q2^2)+4\ p1\ q1^2\ (p2+(q1-q2)\ t)+p1\ q2\ (-2\ q1+q2)\ t^2\ v+q1^2\ (-(p2+(q1-q2)\ t)^2+p2\ t^2\ v))$

$1/(q1^2\ (q1-q2)^2\ t^3)\ (-3\ p1^2\ (3\ q1^2-4\ q1\ q2+2\ q2^2)+4\ p1\ q1^2\ (p2+(q1-q2)\ t)+p1\ q2\ (-2\ q1+q2)\ t^2\ v+q1^2\ (-(p2+(q1-q2)\ t)^2+p2\ t^2\ v))$

$c=(2\ (p1-3\ p2+(-q1+q2)\ t)\ (p1-p2+(-q1+q2)\ t)+(-p1+p2)\ t^2\ v)/((q1-q2)^2\ t^3)$

$(2\ (p1-3\ p2+(-q1+q2)\ t)\ (p1-p2+(-q1+q2)\ t)+(-p1+p2)\ t^2\ v)/((q1-q2)^2\ t^3)$